| | |
|---|---|
| ELITE KEBILI | **Nombres complexes** |
| MR : AMMAR BOUAJILA | |
| GSM : 92 741 567/ 92 741 563 | CLASSES TERMINALES — Résumé de cours |


## A) Forme algébrique d'un nombre complexe.

***Théorème***

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$ de nombres appelés *nombres complexes*, tel que :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication pour lesquelles les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre non réel, noté i, vérifiant $i^2 = -1$ ;
- Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme ( dite algébrique ) :

$z = a + i\,b$ où a et b sont des réels.

***Définitions***

- Le réel a est appelé *partie réelle* de z et est noté Re(z)
- Le réel b est appelé *partie imaginaire* de z et est noté Im(z)
- Si b = 0 alors $z = a$ z est un *réel.*
- Si a = 0 alors $z = i\,b$ z est appelé *imaginaire pur*.
- *0* est à la fois réel et imaginaire pur.

***Premières conséquences***

a, b, a', b' sont des réels

$a + i\,b = a' + i\,b' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$
$a + i\,b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$

***Opposé d'un complexe***

Si $z = a + i\,b$ avec a et b réels alors on appelle opposé de z le complexe noté $-z$ tel que : $-z = -a - i\,b$

## B) Conjugué d'un nombre complexe

***Définition***

On appelle *conjugué* du complexe $z = a + i\,b$, a et b réels, le complexe noté $\bar{z}$ et Définie par : $\bar{z} = a - i\,b$.

***Conséquence***

$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2\,i\,\mathrm{Im}(z)$.

*Théorèmes*

Soit Z un nombre complexe

- Z est un réel si seulement si $Z = \bar{Z}$
- Z est imaginaire si seulement si $Z = -\bar{Z}$

*Propriétés*

Pour tous complexes z et z' :

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ et $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z'}$

Ces résultats s'étendent à une somme algébrique de n termes.

- $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z'}$

Ces résultats s'étendent à un produit de n termes :

pour tout entier naturel n, $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$.

- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$
- $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$
- Si $z = a + i\,b$ avec a et b réels alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$
- si $(a\,;b) \neq (0\,;0)$, on a $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\,\frac{-b}{a^2+b^2}$. C'est la

méthode utilisée pour écrire sous forme algébrique un inverse ou un quotient

## C) Représentation géométrique d'un nombre complexe

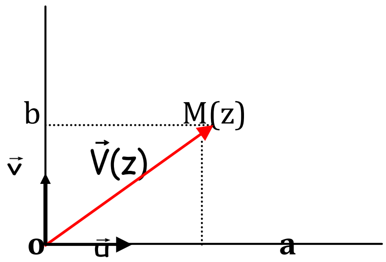
Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$

*Définitions*

Soit le complexe $z = a + i\,b$, a et b réels.

- Le point M(a;b) est appelé le *point image* de z.

On le note souvent M(z).




**- Le vecteur $\vec{V}$ (a;b) est le *vecteur image* de z.**

**On le note souvent $\vec{V}(z)$.**

**- Le complexe z = a + i b est *l'affixe* du point M(a,b) et *l'affixe* du vecteur $\vec{V}$ (a, b)**

**On le note souvent $Z_M$ ou $Z_{\vec{V}}$.**

*Affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$*

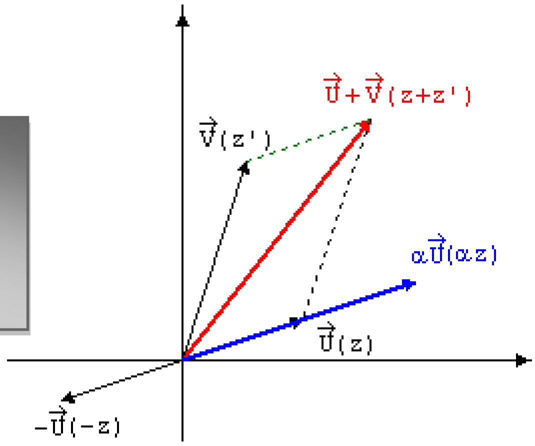
**affixe($\overrightarrow{AB}$) = affixe (B) – affixe (A)**

**On note souvent :** $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$

### *Propriétés*

***Pour tous vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et pour tout réel $\alpha$***

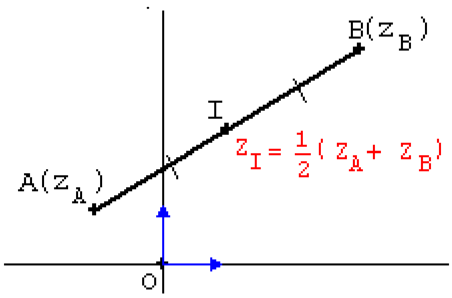
$$Z_{\vec{U}+\vec{V}} = Z_{\vec{U}} + Z_{\vec{V}}$$
$$Z_{\alpha\vec{U}} = \alpha\, Z_{\vec{U}}$$
$$\vec{W} = \alpha\,\vec{U} + \beta\,\vec{V} \iff Z_{\vec{W}} = \alpha\, Z_{\vec{U}} + \beta\, Z_{\vec{V}}$$
En particulier : $\vec{U} = \vec{V} \iff Z_{\vec{U}} = Z_{\vec{V}}$




### *Affixe du milieu d'un segment*

**Si I est le milieu du segment [AB] alors**

$$Z_I = \frac{Z_A+Z_B}{2}$$
Par conséquence : $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$




### Théorème

***Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs tels que $\vec{V}$ non nul***
***Les vecteurs $\vec{U}$ e $\vec{V}$ sont colinéaires si et seulement $\frac{Z_{\vec{U}}}{Z_{\vec{V}}}$ est réel***
***Les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{Z_{\vec{U}}}{Z_{\vec{V}}}$ est imaginaire***

## D) Module et arguments d'un nombre complexe non nul.

### *Définition*

**Soit z un nombre complexe non nul d'image M .dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$ ; $\vec{v}$), et soit (r, $\theta$) un couple de coordonnées polaires du point M dans (O; $\vec{u}$).**

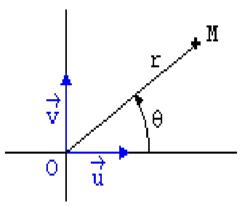
**- le réel r est appelé module de z et noté $|z|$ ;**

**-le réel $\theta$ est appelé argument de z et noté arg(z).**

**On a donc :**

**$|z| = r = OM$**

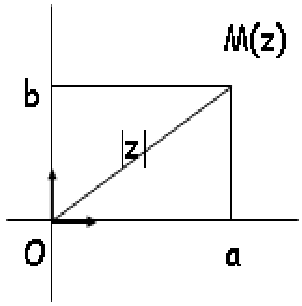
**$\arg(z) = \theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ $[2\pi]$**



### *Remarques*

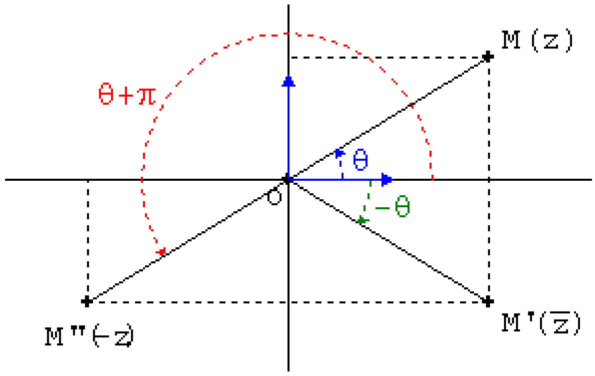
- **Le complexe 0 a pour module 0 mais n' a pas d'argument.**
- **Tout complexe non nul z a une infinité d'arguments. Si $\theta$ est l'un d'eux, tout autre argument de z est de la forme $\theta + K\,2\pi$, $K \in \mathbb{Z}$. On écrit alors :**
- **arg(z) = $\theta$ [mod $2\pi$] ( ou simplement [$2\pi$] ).**

### *Conséquences*




- **Si Z = a + i b avec a et b réels alors** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .
- **z réel non nul équivaut à arg(z) = 0 [$\pi$].**
- **z imaginaire pur non nul équivaut à arg(z) = $\frac{\pi}{2}$ [$\pi$].**
- **Soit z un complexe non nul :**

$\text{Arg}(\overline{Z}) \equiv -\text{Arg}(Z)\ [2\pi]$
$\text{Arg}(-Z) \equiv \pi + \text{Arg}(Z)\ [2\pi]$



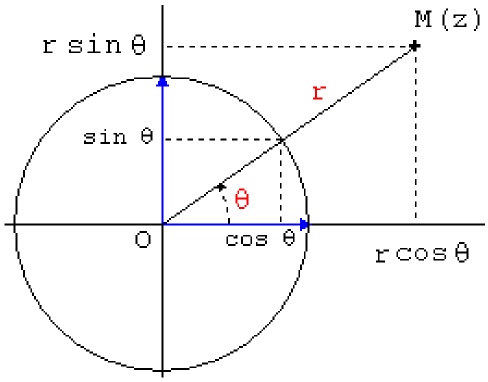

## E) Formes trigonométriques d'un nombre complexe non nul.

*Définition :*

Soit z un nombre complexe non nul de module r et dont un argument est $\theta$. L' écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelée *forme trigonométrique* de z.

Si Z = a + ib alors

a = r cos$\theta$ et b = r sin$\theta$ ; avec r = |Z|




### *Relations de passage entre forme algébrique et forme trigonométrique.*

**Forme algébrique**
**z = a + i b**
**a et b réels**

$r = \sqrt{a^2+b^2}$ ; $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$ →

← $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$

**Formes trigonométriques**

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

*Théorème*

Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$

## F) Propriétés des modules et arguments.

### *Propriétés des modules*

**Pour tous complexes z et z' :**

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $|-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}| = |z|$
- $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ **ou** $|z|^2 = z\bar{z}$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ **( inégalité triangulaire )**
- $|zz'| = |z||z'|$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ **et** $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ **si** $z \neq 0$.
- **Le module d'un produit de n nombres complexes est égal au produit des modules de ces complexes.**
  **En particulier : pour tout entier naturel n,** $|z^n| = |z|^n$.

### *Propriétés des arguments*

**Pour tous complexes non nuls z et z'**

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\quad [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z)\ [2\pi]$

**pour tout entier naturel n,** $\arg(z^n) = n\arg(z)\quad [2\pi]$

### *Formule de Moivre*

*Pour tout réel $\theta$ et pour tout entier n*

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

**Par conséquence :** $\cos n\theta = \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^n)$

$\sin n\theta = \mathrm{Im}((\cos\theta + i\sin\theta)^n)$

## G) Formes exponentielles d'un nombre complexe non nul.

### *Définition*

**Pour tout réel $\theta$ on pose :** $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

**Alors, si z est un nombre complexe non nul de module r et dont un argument est $\theta$ on appelle forme exponentielle de z l'écriture :** $z = r\,e^{i\theta}$.

### *Règles de calcul sur les formes exponentielles*

$\theta$ et $\theta'$ **sont des réels quelconques, r et r' sont des réels > 0.**

- $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow (r = r' \text{ et } \theta = \theta' \ [\text{mod } 2\pi])$
- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
- $-(re^{i\theta}) = re^{i(\theta+\pi)}$
- $re^{i\theta} \times r e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{1}{re^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$
- $\dfrac{r'e^{i\theta'}}{r\,e^{i\theta}} = \dfrac{r'}{r}e^{i(\theta'-\theta)}$
- $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n\, e^{i\,n\theta}$**, pour tout n de □**

### *Formules d'Euler*

**Pour tout réel** $\theta$ **:**

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

**Remarque 1**

| | |
|---|---|
| $e^{i0}=1$ | $e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$ |
| $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$ | $e^{i\pi}=-1$ |
| $1-e^{i\theta} = -2\ i\ \sin(\frac{\theta}{2}).\ e^{i\frac{\theta}{2}}$ | $1+e^{i\theta} = 2\cos(\frac{\theta}{2}).\ e^{i\frac{\theta}{2}}$ |
| $e^{i\theta}-i = 2i\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}$ | $e^{i\theta}+i= 2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}$ |

**Remarque 2**

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $Z = re^{i\theta}$

**Sont dites formes trigonométrique et exponentielle si seulement si r >0**

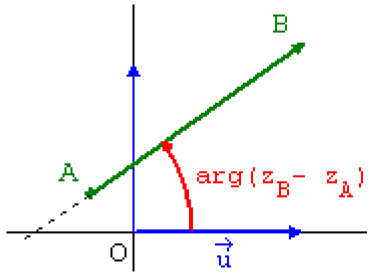
## H) Distances et angles orientés

*Longueur d'un segment [AB]* $\quad AB = |Z_B - Z_A|$

***Mesure de l'angle*** $(\vec{U}\,;\overrightarrow{AB})$

**A et B étant deux points distincts**

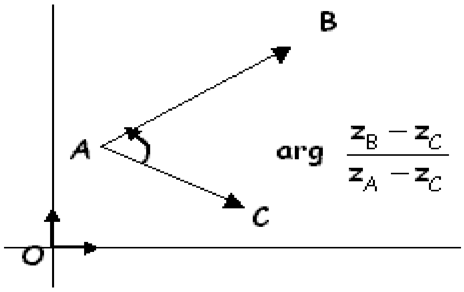
$$(\vec{U}\,;\overrightarrow{AB}) = arg(Z_B\text{-}Z_A)[2\pi]$$




***Mesure de l'angle*** $(\overrightarrow{CA}\,,\overrightarrow{CB})$

***A , B et C trois point distincts***

$$(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}) = Arg(\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C})[2\pi]$$




## ***Conséquences***

**Les points A, B et C étant trois points distincts :**

- **les points A, b et C sont alignés si, et seulement si,** $Arg(\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}) \equiv 0[\pi]$
- **les droites (CA) et (CB) sont perpendiculaires si, et seulement si,** $Arg(\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.
- $\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C} = \frac{BC}{AC}(\cos\theta + i\sin\theta)$ **avec** $(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}) \equiv \theta[2\pi]$

## I)Equation $Z^n$ = a ,n $\geq$ 1, a$\in \mathbb{C}^*$

### Théorème et définition

**Pour tout entier naturel non nul n,l'équation $Z^n$ =1 admet dans C n solutions distincts**

**définies . par :** $Z_K = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$**,l'entier K∈{0,1,... ;(n-1)}**

**Les solutions de l'équation $Z^n$=1 sont appelées racines niémes de l'unité**

### Théorème et définition

**Soit a un nombre complexe non nul d'argument $\theta$ et n un entier naturel non nul**

**L'équation $Z^n$ = a admet dans C , n solutions distincts définies par :**

$Z_K = re^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$ **, k ϵ{0,1,.... ;n-1}, ou r est le réel strictement positif tel que $r^n$=|a|**

**Ces solution sont appelées les racines nièmes du nombre complexe a,**

## J) Résolution dans C, de l'équation $az^2$ + bz + c = 0 , a$\neq$ 0

### Théorème

**Soit a, b et c des nombres complexe tels que a $\neq$ 0**

**L'équation $az^2 + bz$ + c = 0 , a$\neq$ 0,admet dans C ,deux solutions**

**Définies par** $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ **et** $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$**, ou $\delta$ est une racine carrée du discriminant**

$\Delta = b^2$**- 4ac**

### Conséquences

Si $z_1$ et $z_2$ sont les solution de $az^2$ + bz + c = 0 , a≠ 0 , alors

$az^2$ + bz + c = a ( z – $z_1$ ) ( z – $z_2$ ) , $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ et $z_1\, z_2 = \frac{c}{a}$

### Théorème

Soit $a_1$ , $a_2$,..., $a_n$ des nombre complexes tels que $a_n \neq 0$ , n≥ 2

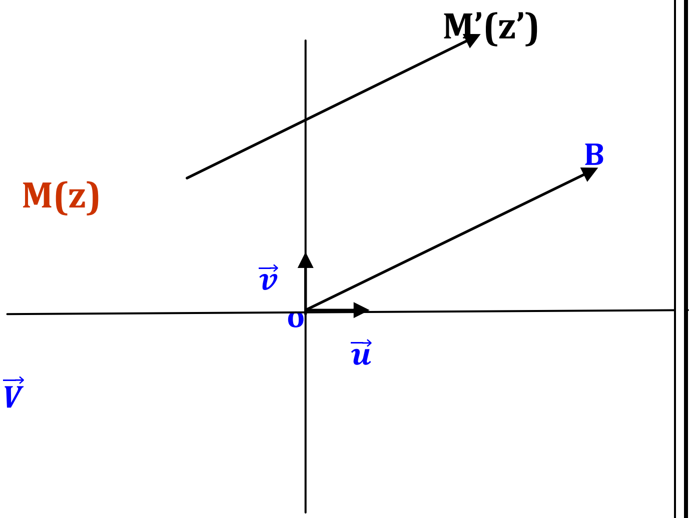
Soit P(z)= $a_n z^n + a_{n-1}\, z^{n-1}$ +....+$a_1$z+$a_0$

Si $z_0$ est un zéro de P , alors P(z) =( z -$z_0$)g(z), ou g(z) est de la forme

$a_{n-1}\, z^{n-1} + b_{n-2}\, z^{n+2}$ +.....+$b_0$ , avec $b_0$ , $b_1$ , ..........,$b_{n-2}$ complexes

## k) Transformations du plan.

;



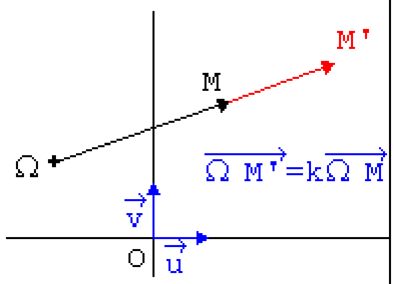

### Translation de vecteur $\vec{V}=\overrightarrow{OB}$

Soit B le point d'affixe b

. le point M' d'affixe z' = z + b est l'image

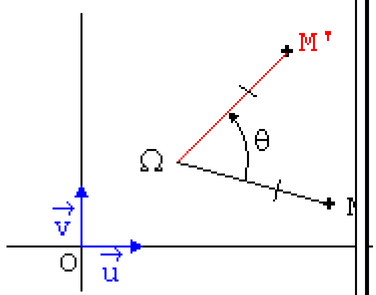
. du M d'affix z par la translation de vecteur $\vec{V}$

### *Homothétie de centre Ω et de rapport K.*




Soit Ω le point d'affixe ω et k un réel non nul.
Le point M' d'affixe z' tel que z' – ω = k (z – ω)
est l'image du point M d'affixe z par l'homothétie
de centre Ω et de rapport k.

### *Rotation de centre Ω et d'angle θ*




Soit Ω le point d'affixe ω et θ un réel.

Le point M' d'affixe z' tel que z' – ω = $e^{i\theta}$ (z – ω)

est l'image du point M d'affixe z par la rotation

de centre Ω et d'angle θ.

### Rappel

- M'=$t_{\vec{V}}(M)$<=>$\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$ <=>$Z_{M'}-Z_M=Z_{\vec{V}}$
- $M'=h_{(k,I)}(M)$<=>$\overrightarrow{IM'}=\overrightarrow{IM}$<=>$Z_{M'}-Z_I=k(Z_M-Z_I)$
- M'=$R_{(I,\theta)}$<=>$\begin{cases} IM = IM' \\ (\overrightarrow{IM}\quad \overrightarrow{IM'}) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases}$

  <=>$Z_{M'}-Z_I=e^{i\theta}(Z_M-Z_I)$